Научная статья
УДК 517.957
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-146-165

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

Гайрат Уразалиевич Уразбоев[1]
Музаффар Машарипович Хасанов[2]

[1,2]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан,

[1]gayrat71@mail.ru
[2]hmuzaffar@mail.ru

Аннотация

В рассматриваемой работе найдены спектральные данные оператора Дирака с периодическим потенциалом, связанного с решением уравнения Шредингера отрицательного порядка с самосогласованным источником интегрального типа. Методом обратной спектральной задачи изучена полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка с самосогласованным источником интегрального типа в классе периодических функций. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина–Трубовица в классе трижды непрерывно дифференцируемых периодических функций. Получены важные следствия об аналитичности и о периоде решения по пространственной переменной.

Ключевые слова и фразы

нелинейное уравнение Шредингера отрицательного порядка, интегральный источник, оператор Дирака, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина-Трубовица, формулы следов.

Для цитирования

Уразбоев Г. У., Хасанов М. М. О периодических решениях уравнения Шредингера отрицательного порядка с самосогласованным источником интегрального типа // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 3, С. 146-165. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-146-165

On periodic solutions of the negative-order Schrodinger equation with an integral-type self-consistent source

Gayrat U. Urazboev[1], **Muzaffar M. Khasanov**[2],

[1,2]Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni
Urgench, Uzbekistan

[1]gayrat71@mail.ru
[2]hmuzaffar@mail.ru

Abstract

In the present work, the spectral data of the Dirac operator with a periodic potential associated with the solution of a negative-order Schrodinger equation with an integral-type self-consistent source are obtained. Using the inverse spectral method, the complete integrability of the negative-order nonlinear Schrodinger equation with an integral-type self-consistent source is investigated in the class of periodic functions. The solvability of the Cauchy problem for the infinite Dubrovin–Trubowitz system of differential equations is proved in the class of thrice continuously differentiable periodic functions. Important results are obtained concerning the analyticity and spatial periodicity of the solution.

Keywords

negative-order nonlinear Schrodinger equation, integral-type source, Dirac operator, inverse spectral problem, trace formulas.

For citation

Urazboev G. U., IKhasanov M. M., On periodic solutions of the negative-order Schrodinger equation with an integral-type self-consistent source // *Mat. Trudy*, 2025, T. 28, № 3, C. 146-165. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-146-165

§ 1. Введение и постановка задачи

Нелинейное уравнение Шредингера является одним из примеров интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных и представляет собой большой интерес в прикладных задачах. Возможность полной интегрируемости этого уравнения методом обратной задачи рассеяния в классе быстро убывающих функций впервые была продемонстрирована В.Е. Захаровым, А.Б. Шабатом и С.В. Манаковым в работах [1–3]. Отдельное внимание уделено изучению нелинейного уравнения Шредингера в пространствах периодических и конечнозонных функций, чему посвящены исследования [4–7]. В работах [8–9] впервые исследована задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в пространстве периодических функций. Кроме того, в исследованиях [10–15] подробно изучены уравнение Кортевега–де Фриза отрицательного порядка и его модифицированный вариант с самосогласованным источником и свободным членом, как в пространствах периодических, так и быстро убывающих функций.

Нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t(x,t)+u_{xx}(x,t)+2u^*(x,t)u^2(x,t)=0$$

можно получить с помощью интегро-дифференциального оператора

$$R=i\begin{pmatrix} -\partial_x-2v(\partial_x^{-1}u) & -2v(\partial_x^{-1}v) \\ 2u(\partial_x^{-1}u) & \partial_x+2u(\partial_x^{-1}v)\end{pmatrix}$$

в соотношении

$$\begin{pmatrix} v_t(x,t) \\ u_t(x,t)\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} v_x(x,t) \\ u_x(x,t)\end{pmatrix} \tag{1}$$

для $v(x,t)=u^*(x,t)$, где $\partial_x=\frac{\partial}{\partial x}$ и $\partial_x^{-1}f=\int_{-\infty}^{x}f(y)dy$.

Используя оператор рекурсии в отрицательном направлении в (1) и введя новую функцию $\mu_x(x,t)=(u(x,t)u^*(x,t))_t$ в соответствии с методом Вероски [16] для исключения $\partial^{-1}(u(x,t)u^*(x,t))_t$, получаем уравнение

$$u_{xt}(x,t)+2u(x,t)\mu(x,t)+iu_x(x,t)=0.$$

Путем введения соответствующей замены $u(x,t)=-p(x,t)+iq(x,t)$ переменных, нелинейное уравнение Шредингера отрицательного порядка можно привести к более простой форме

$$\begin{cases} p_{xt}=2\mu p-q_x, \\ q_{xt}=2\mu q+p_x \qquad t>0, \quad x\in R. \\ \mu_x=2qq_t+2pp_t \end{cases}$$

В работе [17] исследуется поведение данных рассеяния, возникающих в спектральной задаче, связанной с уравнением Шредингера отрицательного порядка, в пространстве быстро убывающих функций.

В работах [18–19] исследованы уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических функций для случаев как без источника, так и с источником.

В настоящей работе метод обратного спектрального анализа используется для интегрирования уравнения Шредингера отрицательного порядка, содержащего интегральный источник, в классе периодических решений.

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение Шредингера отрицательного порядка с самосогласованным источником интегрального типа

$$\left\{\begin{array}{c} p_{xt}=2\mu p-q_x+\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-)d\lambda, \\ q_{xt}=2\mu q+p_x+\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-)d\lambda \quad t>0, \quad x\in R, \\ \mu_x=2qq_t+2pp_t \end{array}\right. \tag{2}$$

с условиями

$$q(x,t)|_{t=0}=q_0(x),\ p(x,t)|_{t=0}=p_0(x),\ \mu(x,t)|_{x=0}=\mu_0(t),$$

$$[q_t(x,t)+\mu(x,t)-p(x,t)]|_{x=0}=\beta(t), \tag{3}$$

где $p_0(x), q_0(x)\in C^3(R)$, $\beta(t)\in C[0,\ \infty)$ и $\mu_0(t)$ заданные действительные функции, $p_0(x)$ и $q_0(x)$ имеют период π, а функция $\beta(t)$ ограничена. Требуется найти действительные периодические по переменной x функции $p(x,t), q(x,t)$ и $\mu(x,t)$, причем

$$p(x+\pi,t)\equiv p(x,t), q(x+\pi,t)\equiv q(x,t), \mu(x+\pi,t)\equiv \mu(x,t), t\geq 0, \quad x\in R,$$

и удовлетворяющие условиям гладкости:

$$\begin{array}{l} p(x,t)\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0), \\ q(x,t)\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0), \\ \mu(x,t)\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0). \end{array} \tag{4}$$

Здесь $\gamma(\lambda,t)\in C\left([0,\ \infty)\times[0,\ \infty)\right)$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\gamma(\lambda,t)=\underline{\underline{O}}\left(1/\lambda^3\right), \quad \lambda\to\infty$, $\psi^\pm=(\psi_1^\pm(x,\lambda,t),\ \psi_2^\pm(x,\lambda,t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^\pm(0,\lambda,t)=1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega(x,t)y=\lambda y, \quad ,x\in R, \tag{5}$$

где

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x,t)=\begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1(x,t) \\ y_2(x,t) \end{pmatrix}$$

Через $s(x,\lambda,t)=(s_1(x,\lambda,t),\ s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t)=(0,\ 1)^T$.

§ 2. Оператор дирака с периодическим коэффициентом

Приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическим коэффициентом (см. [20-28]).

Рассмотрим дифференциальную систему уравнений типа Дирака, заданную на всей вещественной оси

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, x \in R \quad (6)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные непрерывные функции из класса $C^1(R)$, имеющие период π, а λ комплексный параметр.

Обозначим через $c(x,\lambda) = (c_1(x,\lambda), c_2(x,\lambda))^T$ и $s(x,\lambda) = (s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda))^T$ два решения уравнения (6) удовлетворяющие соответствующим начальным условиям при $c(0,\lambda) = (1,\ 0)^T$ и $s(0,\lambda) = (0,\ 1)^T$. Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\ \lambda) + s_2(\pi,\ \lambda)$ называется функцией Ляпунова, также известной как дискриминант Хилла, для оператора Дирака, связанного с уравнением (6).

Уравнение (6) имеет два линейно независимых решения, которые имеют следующий вид:

$$\psi^{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s_2(\pi,\lambda) - c_1(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda)} s(x,\lambda),$$

которые называются решениями Флоке.

Собственные значения, соответствующие либо периодической $y_1(0) = y_1(\pi)$,
$y_2(0) = y_2(\pi)$, либо антипериодической $(y_1(0) = -y_1(\pi),\ y_2(0) = -y_2(\pi))$ спектральной задаче для уравнения Дирака (6), будем обозначать через λ_n $n \in Z$, упорядочив их по возрастанию.

Спектр оператора (6) состоит из следующего множества

$$E = \{\lambda \in R : \ -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\ \} = R \backslash \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}.$$

Отрезки между соседними спектральными значениями, обозначаемые как
$(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n \in Z$, принято называть лакунами (запрещенными зонами) спектра. Обозначим через ξ_n, $n \in Z$ корни уравнения $s_1(\pi,\lambda) = 0$. Эти значения совпадают с собственными числами задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$, поставленной для системы (6). При этом справедливы соотношения вида $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$, отражающие чередование корней и их связь с краевыми условиями.

Величины $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$ и соответствующие им знаки $\sigma_n = sign\left\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\right\}$, $n \in Z$ принято называть спектральными параметрами задачи (6). Совокупность этих параметров наряду с границами спектра λ_n, $n \in Z$ образует спектральные данные, ассоциированные с задачей (6). Процесс определения спектральных данных по известным коэффициентам уравнения представляет собой прямую спектральную задачу, тогда как восстановление коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ на основании известных спектральных данных составляет содержание обратной задачи спектрального анализа.

Если в задаче (6) вместо функций $p(x)$ и $q(x)$ рассмотреть $p(x+\tau)$ и $q(x+\tau)$, то спектр новой задачи оказывается независимым от параметра τ: $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in Z$. В то же время спектральные параметры, напротив, зависят от параметра τ:$\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in Z$. Эти параметры удовлетворяют системе уравнений, аналогичной системе Дубровина–Трубовица:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi(\tau))\left\{2\xi_n(\tau) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau))\right\}, n \in Z,$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau))}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau))}{(\xi_k(\tau) - \xi_n(\tau))^2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ - меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина, а также следующие формулы следов

$$p(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau)\right), q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi(\tau))$$

дают метод решения обратной задачи.

Докажем, что интеграл, входящий в уравнение (2), сходится равномерно.

Для этого доказательства воспользуемся следующими тождествами

$$s_1(\pi, \lambda, t)[\psi_1^+(\tau, \lambda, t)\psi_2^-(\tau, \lambda, t) + \psi_1^-(\tau, \lambda, t)\psi_2^+(\tau, \lambda, t)]$$

$$= s_2(\pi, \lambda, t, \tau) - c_1(\pi, \lambda, t, \tau),$$

$$
\begin{aligned}
s_1(\pi,\lambda,t)[\psi_1^+(\tau,\lambda,t)\psi_1^-(\tau,\lambda,t)-\psi_2^-(\tau,\lambda,t)\psi_2^+(\tau,\lambda,t)]\\
=s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где функции $c(x,\lambda,t,\tau)$ и $s(x,\lambda,t,\tau)$ представляют собой решения уравнения Дирака с коэффициентами $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$, удовлетворяющие начальным условиям $c_1(0,\lambda,t,\tau)=1$, $c_2(0,\lambda,t,\tau)=0$ и $s_1(0,\lambda,t,\tau)=0$, $s_2(0,\lambda,t,\tau)=1$.

Из асимптотических формул

$$
c(x,\lambda,t,\tau)=\begin{pmatrix}\cos\lambda x\\ \sin\lambda x\end{pmatrix}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\quad \lambda\to\pm\infty,
$$

$$
s(x,\lambda,t,\tau)=\begin{pmatrix}-\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{pmatrix}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\quad \lambda\to\pm\infty
$$

следуют оценки

$$
s_2(\pi,\lambda,t,\tau)-c_1(\pi,\lambda,t,\tau)=\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),
$$

$$
s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau)=\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\quad \text{при}\quad \lambda\to\pm\infty.
$$

Указанные оценки вместе с равенством (7) позволяют установить равномерную сходимость интеграла, входящего в уравнение (2).

Заметим, что для решения $(y_1,\ y_2)^T$ уравнения (6) выполнены следующие тождества:

$$
2y_2y_1=\frac{1}{2\lambda}[y_2^2-y_1^2]'+\frac{1}{\lambda}q(y_1^2+y_2^2),\tag{8}
$$

$$
y_1^2-y_2^2=\frac{1}{\lambda}[y_1y_2]'+\frac{1}{\lambda}p(y_1^2+y_2^2),\tag{9}
$$

$$
\frac{1}{2}[y_2^2+y_1^2]'=q(y_1^2-y_2^2)-2py_1y_2.\tag{10}
$$

§ 3. Эволюция спектральных параметров

Главный результат, полученный в рамках данной работы, формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть набор* $(q(x,t),\ \mu(x,t),\ \psi^{+}(x,\lambda,t),\ \psi^{-}(x,\lambda,t),\ s_1(\pi,\lambda,t))$, *является решением задачи* (2)-(4). *Тогда спектр оператора* (5) *инвариантен по параметру* t, *а спектральные параметры* $\xi_n=\xi_n(t),\ n\in Z\backslash\{0\}$ *являются решениями системы уравнений типа Дубровина-Трубовица:*

$$\dot{\xi}_n=\frac{1}{\xi_n}(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)\times$$

$$\times\left\{q_t(0,t)+\mu(0,t)-p(0,t)-\xi_n-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\right\},n\in Z\backslash\{0\} \tag{11}$$

где знак $\sigma_n(t)=\pm1$ *меняется на противоположный при каждом столкновении точки* $\xi_n(t)$ *с границами своей лакуны* $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$, *и выполнены следующие начальные условия:*

$$\xi_n(t)|_{t=0}=\xi_n^0,\quad \sigma_n(t)|_{t=0}=\sigma_n^0\,,\ \ n\in Z\backslash\{0\}, \tag{12}$$

с $\xi_n^0,\ \ \sigma_n^0,\ \ n\in Z\backslash\{0\}$ *которые являются спектральными значениями оператора Дирака, построенного на основе коэффициентов* $p_0(x),q_0(x)$.

Доказательство. Пусть $y_n(x,t)=(y_{n,1}(x,t),y_{n,2}(x,t))^T$, $n\in Z$ ортонормированные собственные вектор-функции, отвечающие задаче Дирихле, удовлетворяющей уравнению (5), и соответствующие спектру значений $\xi_n(t)\,,\ \ n\in Z$.

Дифференцируя по t тождество $\xi_n(t)=(L(t)y_n,y_n)$, и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n=(\dot{\Omega}(x,t)y_n,y_n). \tag{13}$$

Используя явный вид скалярного произведения

$$(y,z)=\int_0^{\pi}[y_1(x)\bar{z}_1(x)+y_2(x)\bar{z}_2(x)]\,dx,\quad y=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix},\ \ z=\begin{pmatrix}z_1(x)\\ z_2(x)\end{pmatrix},$$

равенство (13) примет вид:

$$\dot{\xi}_n=\int_0^{\pi}[(y_{n,1}^2-y_{n,2}^2)p_t+2y_{n,1}y_{n,2}\,q_t]dx. \tag{14}$$

Используя формулы (8) и (9), получаем

$$\dot{\xi}_n=\frac{1}{\xi_n}\int_0^{\pi}(y_{n,1}y_{n,2})'p_tdx+\frac{1}{\xi_n}\int_0^{\pi}(y_{n,2}^2+y_{n,1}^2)pp_tdx+$$

$$+\frac{1}{2\xi_n}\int_0^{\pi}(y_{n,2}^2-y_{n,1}^2)'q_tdx+\frac{1}{\xi_n}\int_0^{\pi}(y_{n,2}^2+y_{n,1}^2)qq_tdx,\ \ n\in Z\backslash\{0\}. \tag{15}$$

Равенство (15) можно переписать в виде

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{2\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)]q_t(0,t) - \frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,1}y_{n,2})p_{xt}dx -$$

$$-\frac{1}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)q_{xt}dx + \frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2)(pp_t + qq_t)dx.$$

Из системы уравнения (2) имеем

$$pp_t + qq_t = \frac{\mu_x}{2},\ p_{xt} = 2\mu p - q_x + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-)d\lambda,$$

$$q_{xt} = 2q\mu + p_x + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-)d\lambda. \tag{16}$$

Следовательно,

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{2\xi_n}\big[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)\big]q_t(0,t) - \frac{2}{\xi_n}\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}p\mu\, dx -$$

$$-\frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)q\mu\, dx + \frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,1}y_{n,2})q_x dx - \frac{1}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)p_x\, dx -$$

$$-\frac{1}{2\xi_n}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t) \times \left(\int_0^\pi -(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-) + \right.$$

$$\left. +2y_{n,1}y_{n,2}(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-)\, dx\right)d\lambda + \frac{1}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2)\mu_x\, dx. \tag{17}$$

Теперь исследуем третий и четвертый интегралы в уравнении (17):

$$I_{3,4} = \frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,1}y_{n,2})q_x dx - \frac{1}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)p_x dx =$$

$$= -\frac{1}{2\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)]p(0,t) +$$

$$+\frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi \big((y_{n,2}p - y_{n,1}q)y_{n,2}' - (y_{n,1}p + y_{n,2}q)y_{n,1}'\big)\, dx. \tag{18}$$

На основании уравнения (5) можно вывести следующие соотношения:

$$\begin{cases} y_{n,1}' + \xi_n y_{n,2} = q\, y_{n,1} - p\, y_{n,2} \\ \xi_n y_{n,1} - y_{n,2}' = p\, y_{n,1} + q\, y_{n,2}\ . \end{cases}$$

Используя указанные выше соотношения, приходим к выражению:

$$I_{3,4} = \frac{1}{\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,1} y_{n,2}) q_x dx - \frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2) p_x dx = \\ = \frac{1}{2\xi_n} [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0,t)](-p(0,t) - \xi_n) \tag{19}$$

Теперь займемся вычислением следующего пятого интеграла из формулы (17):

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t) \times$$

$$\times \left(\int_0^\pi -(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)(\psi_1^+ \psi_2^- + \psi_2^+ \psi_1^-) + 2y_{n,1} y_{n,2} (\psi_1^+ \psi_1^- - \psi_2^+ \psi_2^-)\, dx \right) d\lambda. \tag{20}$$

Не представляет трудности убедиться, что последний интеграл можно представить в виде:

$$J = \int_0^\pi [-(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)(\psi_1^+ \psi_2^- + \psi_2^+ \psi_1^-) + 2y_{n,1} y_{n,2} (\psi_1^+ \psi_1^- - \psi_2^+ \psi_2^-)] dx =$$

$$= - \int_0^\pi [(y_{1,n} \cdot \psi_1^+ + y_{2,n} \cdot \psi_2^+) \cdot (y_{1,n} \cdot \psi_2^- - y_{2,n} \cdot \psi_1^-) + \\ + (y_{1,n} \cdot \psi_1^- + y_{2,n} \cdot \psi_2^-) \cdot (y_{1,n} \cdot \psi_2^+ - y_{2,n} \cdot \psi_1^+)] dx.$$

Используя равенство:

$$(y_{1,n} \cdot \psi_2^\pm - y_{2,n} \cdot \psi_1^\pm)' = (\lambda - \xi_n)(y_{1,n} \cdot \psi_1^\pm + y_{2,n} \cdot \psi_2^\pm),$$

можно получить следующее представление

$$J = \frac{1}{\xi_n - \lambda} \cdot [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0,t)]. \tag{21}$$

Подставляя результат (21) в формулу (20), получим

$$I_5 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\} \cdot [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0,t)]. \tag{22}$$

Преобразуем последний интеграл путем интегрирования по частям:

$$I_6 = \frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2) \mu_x dx =$$

$$= \frac{1}{2\xi_n} [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0,t)] \mu(0,t) - \frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{2,n}^2 + y_{1,n}^2)' \mu dx. \tag{23}$$

С учетом выражения (10), формула (23) принимает следующий вид:

$$I_6 =$$

$$= \frac{1}{2\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)]\mu(0,t) + \frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi (y_{2,n}^2 - y_{1,n}^2)q\mu dx + \frac{2}{\xi_n}\int_0^\pi y_{1,n}y_{2,n}p\mu dx. \tag{24}$$

Основываясь на соотношениях (17), (19), (22) и (24), делаем заключение:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_n(t) &= \frac{1}{2\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)] \\ &\quad \times \left\{ q_t(0,t) + \mu(0,t) - p(0,t) - \xi_n - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\},\end{aligned} \tag{25}$$

$n \in Z \backslash \{0\}$.

Решение уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию $s(0,\lambda,t) = (0,1)^T$, обозначим как векторную функцию $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t), s_2(x,\lambda,t))^T$. Отсюда следует, что норма собственной векторной функции задачи Дирихле $s(x,\xi_n(t),t)$, соответствующей собственному значению $\xi_n(t)$, определяется следующим образом:

$$c_n^2(t) = \int_0^\pi [s_1^2(x,\xi_n(t),t) + s_2^2(x,\xi_n(t),t)]dx = -\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda} s_2(\pi,\xi_n(t),t). \tag{26}$$

Объединяя выражение $y_n(x,t) = \frac{1}{c_n(t)} s(x,\xi_n(t),t)$ и формулу (23), можно вывести следующее равенство:

$$y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t) = \frac{s_2^2(\pi,\xi_n(t),t) - 1}{c_n^2(t)} = -\frac{s_2(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(t),t)}}{\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}. \tag{27}$$

Подставив $x = \pi$ и $\lambda = \xi_n(t)$ в равенство

$$c_1(x,\lambda,t)s_2(x,\lambda,t) - c_2(x,\lambda,t)s_1(x,\lambda,t) = 1,$$

получим:

$$c_1(\pi,\xi_n(t),t) = \frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(t),t)}. \tag{28}$$

Принимая во внимание соотношение (28), а также используя равенство

$$[c_1(\pi,\lambda,t) - s_2(\pi,\lambda,t)]^2 = (\Delta^2(\lambda) - 4) - 4c_2(\pi,\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t),$$

приходим к тождеству:

$$s_2(\pi, \xi_n(t), t) - \frac{1}{s_2(\pi, \xi_n(t), t)} = \sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}, \tag{29}$$

где

$$\Delta(\lambda) = c_1(\pi, \lambda, t) + s_2(\pi, \lambda, t), \sigma_n(t) = sign\left\{s_2(\pi, \xi_n(t), t) - c_1(\pi, \xi_n(t), t)\right\}.$$

Из (27) и (29) выводим

$$y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t) = -\frac{\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\frac{\partial s_1(\pi, \xi_n(t), t)}{\partial\lambda}}. \tag{30}$$

С учетом разложения

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_{2k-1})(\lambda - \lambda_{2k})}{a_k^2}, s_1(\pi, \lambda, t) = \pi \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{a_k},$$

где $a_0 = 1$ и $a_k = k$ при $k \neq 0$, равенство (30) можем переписать в следующем в виде:

$$y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi). \tag{31}$$

При этом мы воспользовались также равенством

$$sign\left\{-\frac{\pi}{a_n} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\xi_k - \xi_n}{a_k}\right\} = (-1)^{n-1}.$$

Подставляя выражение (31) в тождество (25) выводим (11).

Если вместо граничных условий Дирихле для функции применить условия периодичности $y(\pi) = y(0)$ или антипериодичности $y(\pi) = -y(0)$, то уравнение (25) преобразуется в $\dot{\lambda}_n = 0$. Это означает, что собственные значения λ_n, $n \in Z$ для периодической и антипериодической задач не зависят от переменной t. □

Следствие 1. Предположим, что вместо функций $p(x, t)$ и $q(x, t)$ рассматриваются функции вида $p(x + \tau, t)$ и $q(x + \tau, t)$. Тогда собственные значения, соответствующие периодическим (антипериодическим) краевым условиям, не зависят от параметров τ и t. Однако для задачи Дирихле собственные значения ξ_n, а также знаки σ_n могут изменяться в зависимости от этих параметров: $\xi_n = \xi_n(\tau, t), \quad \sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$. При этом система (10), преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \times$$
$$\times \left\{ q_t(\tau, t) + \mu(\tau, t) - p(\tau, t) - \xi_n(\tau, t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\}, \tag{32}$$
$$n \in Z \backslash \{0\},$$

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in Z \backslash \{0\} \tag{33}$$

где

$$s_1(\pi, \lambda, t, \tau) = \pi \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{a_k}.$$

Используя формулы следов

$$q(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \tag{34}$$

$$p(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2n-1} - \lambda_{2n}}{2} - \xi_n(\tau, t) \right) \tag{35}$$

и равенство $\mu_x = 2pp_t + 2qq_t$, получим

$$q_t(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t},$$

$$p_t = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t}, \tag{36}$$

$$\mu(\tau, t) = \mu_0(t) + 2 \int_0^{\tau} (p(s, t) p_t(s, t) + q(s, t) q_t(s, t)) ds. \tag{37}$$

Замечание. Существование и единственность решения задачи Коши (32), (33) для системы Дубровина-Трубовица в случае, когда $p_0(x), q_0(x) \in C^3(R)$, также изучены в работе [29].

Следствие 2. Указанная теорема предоставляет способ нахождения решения задачи (2)-(4). Пусть λ_n, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n \in Z$ спектральные характеристики задачи (5), соответствующие коэффициентам $p(x + \tau, t)$

и $q(x+\tau,t)$. Определим спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z$, которые соответствуют начальным данным $p_0(x+\tau)$ и $q_0(x+\tau)$. После этого решается задача Коши со следующими начальными условиями:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)\,,\;\; n\in Z\backslash\{0\}.$$

Далее, используя систему уравнений Дубровина–Трубовича (32), а также формулы следов (34) и (35), находим решения $p(x,t)$ и $q(x,t)$, соответствующие задаче (2)–(4). Затем, опираясь на равенство (37), вычисляем $\mu(x,t)$. После этого нетрудно найти решения $\psi^{\pm}(x,\lambda,t)$,$s_1(x,\lambda,t)$.

Следствие 3. На основе результатов, полученных в работе [22], можно заключить, что если начальные функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$ являются вещественными аналитическими, компоненты решения $(p(x,t),\ q(x,t))$ также будут вещественными аналитическими функциями относительно переменной x.

Следствие 4. Если число $\pi/2$ является периодом (антипериодом) для начальных значений $p_0(x)$ и $q_0(x)$, то все корни уравнения $\Delta(\lambda)\pm 2=0$ являются двукратными. Так как функция Ляпунова, соответствующая коэффициентам $p(x,t)$ и $q(x,t)$, совпадает с $\Delta(\lambda)$,то согласно обратной теореме Борга (см[23,25]), число $\pi/2$ является также периодом (антипериодом) для решений $p(x,t)$ и $q(x,t)$, по переменной x.

Список литературы

1. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // *ЖЭТФ. – Москва.* (1971), 118–134.

2. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* О взаимодействии солитонов в устойчивой среде // *ЖЭТФ. – Москва.* (1973), 1627–1639.

3. *Захаров В. Е., Манаков С. В.* Полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера, // *ТМФ. - Москва.* (1974), 332–343, https://doi.org/10.1007/BF01035568.

4. *Ахмедиев Н. Н., Корнеев В. И.* Модуляционная неустойчивость и периодические решения нелинейного уравнения Шредингера // *ТМФ. - Москва.* (1986), 189–194.

5. *Итс А. Р.* О связи между солитонными и конечнозонными решениями нелинейного уравнения Шредингера. Спектральная теория. Волновые процессы // *Изд-во ЛГУ.* (1982), 118-137

6. *Итс А. Р.* Точное интегрирование в римановых θ-функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза // *Дисс. канд. физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ* . (1977).

7. *Итс А. Р., Котляров В. П.* Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера // *ДАН УССР сер. А. - Киев* . (1976) 965-968.

8. *Yakhshimuratov A. B.* The Nonlinear Schrodinger Equation with a Self-consistent Source in the Class of Periodic Functions // *Mathematical Physics* **14**: 1 (2011) 153–169, https://doi.org/10.1007/s11040-011-9091-5

9. *Khasanov M. M.* Modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source. *AIP Conference Proceedings* **2781**: (2023) 020009,1-020009,5, https://doi.org/10.1063/5.0145265

10. *Хасанов М. М., Рахимов И. Д.*. Интегрирование уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций // *Чебышевский сборник* **24**: (2023) 266-–275, https://doi.org 10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275

11. *Urazboev G. U., Khasanov M. M., Ganjaev O. Y.*. Integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions // *International Journal of Applied Mathematics* **37**: (2024) 37–46, http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.4

12. *Уразбоев Г. У., Балтаева И. И., Исмоилов О. Б.*. Интегрирование уравнения Кортевега– де Фриза отрицательного порядка методом обратной задачи рассеяния // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки* **33**: 1 (2023) 523–533, https://doi. 10.35634/vm230309

13. *Уразбоев Г. У., Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М.*. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка в классе периодических функций // *Теорет. и матем. физика* **217**: (2023) 317–328, https://doi.org/10.4213/tmf10580

14. *Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б.* Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с интегральным источником // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета* **63**: (2024) 80-–90. doi: 10.35634/2226-3594–2024-630

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 146-165
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 146-165

15. *Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б.* Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с нагруженным членом в классе периодических функций // *Дифференциальные уравнения* **60**: 12 (2024) 1703—1712, https://doi.org/ 10.31857/S0374064124120094

16. *Verosky J. M.. Negative powers of Olver recursion operators.* / J. Math. Phys. (1991), 1733–1736

17. *Уразбоев Г. У., Балтаева И. И., Бабаджанова А. К.* Солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка // *ТМФ* **219**: 1 (2024) 263–273, https://doi.org/10.1007/s11040-011-9091-5

18. *Хасанов М. М., Рахимов И. Д., Азимов Д. Б.* Интегрирование нагруженного нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических функций // *Вестник Иркутского государственного университета. Серия «Математика* **50**: 1 (2024) 51–65, https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51

19. *Urazboev G. U., Khasanov M. M., Babadjanova A. K.* Integration of the Negative Order Nonlinear Schrodinger Equation in the Class of Periodic Functions // *Lobachevskii J Math* **45**: 1 (2024) 5305–5312, https://doi.org/10.1134/S1995080224606106

20. *Левитан Б.М., Саргсян И. С.* / *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака*, М.: Наука. (1988).

21. *Мисюра Т. В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I / *Теория функций, функц. анализ и их прил.* (1978), 90-101.

22. *Хасанов А. Б., Ибрагимов А. М.* Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // *Узб. мат. журнал*, (2001) 48-55.

23. *Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б.* Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака // *Узб. мат. журнал*, (2000) 40-46.

24. Djakov P. B., Mityagin B. S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrodinger and Dirac operators // *Russian Math. Surveys* **61**, (2006), 663–766, https://doi.org/10.1070/RM2006V061N04ABEH004343.

25. *Currie S., Roth T., Watson B.* Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // *Proc. Edinb. Math*, **60**: 1 (2017) 615–633, https://doi.org/10.1017/S0013091516000389

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 146-165
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 146-165

26. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака II, Теория функцией, функциональный анализ и их приложения // *30, ред. В.А. Марченко, Вища школа, Харьков* (1979) 102-109,

27. *Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля* / М.: Наука, (1984) 240.

28. *Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения* // Киев: Наукова думка, (1977), 332.

29. *Хасанов А. Б., Нормуродов Х. Н., Худаеров У. О.* Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза синус-Гордона в классе периодических бесконечнозонных функций. *Теорет. и матем. физика* **214**: 1 (2023) 198–210, https://doi.org/10.4213/tmf10365

References

1. *Zakharov V. E., Sabat A. B.* Exact theory of two-dimensional selffocusing and one-dimensional selfmodulation of waves in nonlinear media // *JETF. – Moskva.* (1971), 118–134.

2. *Zakharov V. E., Shabat A. B.* O vzaimodeystvi i solitonov v ustoychivoy srede // *JETF. – Moskva.* (1973), 1627–1639.

3. *Zakharov V. E., Manakov S. V.* On the complete integrability of a nonlinear Schredinger equation", TMF, 19:3 (1974), 332–343; Theoret. and Math. Phys., 19:3 (1974), 551–559, https://doi.org/10.1007/BF01035568.

4. *Akhmediev N. N., Korneev V. I.* Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schredinger equation", TMF, 69:2 (1986), 189–194; Theoret. and Math. Phys., 69:2 (1986), 1089–1093, https://doi.org/10.1007/BF01037866.

5. *Its A. R.* O svyazi mejdu solitonnыmi i konechnozonnыmi resheniyami nelineynogo uravneniya Shredingera. Spektralьnaya teoriya. Volnovye protsessy // *Izd-vo LGU.* (1982), 118-137

6. *Its A. R.* Tochnoe integrirovanie v rimanovykh θ-funktsiyakh nelineynogo uravneniya Shredingera i modifitsirovannogo uravneniya Kortevega-de Friza // *Diss. kand. fiz.-mat. nauk, L.: LGU* . (1977).

7. *Its A. R., Kotlyarov V. P.* Yavnye formuly dlya resheniy nelineynogo uravneniya Shredingera // *DAN USSR ser. A. - Kiev* . (1976) 965-968.

8. *Yakhshimuratov A. B.* The Nonlinear Schrodinger Equation with a Self-consistent Source in the Class of Periodic Functions // *Mathematical Physics* **14**: 1 (2011) 153–169, https://doi.org/10.1007/s11040-011-9091-5

9. *Khasanov M. M.* Modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source. *AIP Conference Proceedings* **2781**: (2023) 020009,1-020009,5, https://doi.org/10.1063/5.0145265

10. *Khasanov M. M., Rakhimov I. D.* Integration of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions. Chebyshevskii Sbornik. 2023;24(2):266-275. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275

11. *Urazboev G. U., Khasanov M. M., Ganjaev O. Y.*. Integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions // *International Journal of Applied Mathematics* **37**: (2024) 37–46, http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.4

12. *Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Ismoilov O. B.*, "Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method", Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 33:3 (2023), 523–533, https://doi.org/10.35634/vm230309

13. *Urazboev G. U., Yakhshimuratov A. B., Khasanov M. M.*, "Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation in a class of periodic functions", TMF, 217:2 (2023), 317–328; Theoret. and Math. Phys., 217:2 (2023), 1689–1699, https://doi.org/10.1134/S0040577923110053

14. *Urazboev G. U., Khasanov M. M., Ismoilov O. B.*, "Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation with an integral source", Izv. IMI UdGU, 63 (2024), 80–90. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-63-06

15. *Urazboev G. U., Khasanov M. M., Ismoilov O. B.* Integration of the Negative-Order Modified Korteweg–de Vries Equation with a Loaded Term in the Class of Periodic Functions//.Differential Equations, 2024, Vol. 60, No. 12, pp. 1757–1766. https://doi.org/10.1134/S1234567823601468.

16. *Verosky J. M.. Negative powers of Olver recursion operators.* / J. Math. Phys. (1991), 1733–1736

17. *Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Babadjanova A. K.*, "Soliton solutions of the negative-order nonlinear Schredinger equation", TMF, 219:2

(2024), 263–273; Theoret. and Math. Phys., 219:2 (2024), 761–769, https://doi.org/10.4213/tmf10652

18. *Khasanov M. M., Rakhimov I. D., Azimov D. B.* Integration of the Loaded Negative Order Nonlinear Schrodinger Equation in the Class of Periodic Functions. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2024, vol. 50, pp. 51–65. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51

19. *Urazboev G. U., Khasanov M. M., Babadjanova A. K.* Integration of the Negative Order Nonlinear Schrodinger Equation in the Class of Periodic Functions // *Lobachevskii J Math* **45**: 1 (2024) 5305–5312, https://doi.org/10.1134/S1995080224606106

20. *Levitan B. M., Sargsyan I. S.* / *Operatory Shturma-Liuvillya i Diraka*, M.: Nauka. (1988).

21. *Misjura T. V.*, Characterization of the spectra of the periodic and antiperiodic boundary value problems that are generated by the Dirac operator, Theory of Functions, Functional Analysis and their Applications, 1978, no. 30, pp. 90–101.

22. *Khasanov A. B., Ibragimov A. M.* Ob obratnoy zadache dlya operatora Diraka s periodicheskim potentsialom // *Uzb. mat. jurnal*, (2001) 48-55.

23. *Khasanov A. B., Yakhshimuratov A. B.* Analog obratnoy teoremy G.Borga dlya operatora Diraka // *Uzb. mat. jurnal*, (2000) 40-46.

24. Djakov P. B., Mityagin B. S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrodinger and Dirac operators // *Russian Math. Surveys* **61**, (2006), 663–766, https://doi.org/10.1070/RM2006V061N04ABEH004343.

25. *Currie S., Roth T., Watson B.* Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // *Proc. Edinb. Math*, **60**: 1 (2017) 615–633, https://doi.org/10.1017/S0013091516000389

26. *Misyura T.V.* kharakteristika spektrov periodicheskoy i antiperiodicheskoy kraevykh zadach, porojdaemykh operatsiey Diraka II, Teoriya funktsiey, funktsionalny analiz i ikh prilojeniya // *30, ped. V.A. Marchenko, Visha shkola, Kharkov* (1978) 90-101.

27. *Levitan B. M. Obratnye zadachi Shturma-Liuvillya* / M.: Nauka, (1984) 240.

28. *Marchenko V. A.Sturm-Liouville operators and applications* // Kiev: Naukova dumka, (1977), 332

29. *Khasanov A. B., Normurodov Kh. N., Hudayerov U. O.*, "Integrating the modified Korteweg–de Vries–sine-Gordon equation in the class of periodic infinite-gap functions", TMF, 214:2 (2023), 198–210; Theoret. and Math. Phys., 214:2 (2023), 170–182, https://doi.org/10.1134/S0040577923020022

Информация об авторе

Гайрат Уразалиевич Уразбоев,

SPIN 141-6563 AuthorID: 249067

Scopus Author ID 6504121361

Web of Science ResearcherID: AAE-6810-2019

Музаффар Машарипович Хасанов, кандидат физико-математических наук, доцент

SPIN номер AuthorID: номер

Scopus Author ID 56152412400

Web of Science Researcher IDGXU-0964-2022

Author Information

Gayrat U. Urazboev,

SPIN 141-6563 AuthorID: 249067

Scopus Author ID 6504121361

Web of Science ResearcherID: AAE-6810-2019

Muzaffar M. Khasanov, Candidate of Mathematics, Associate Professor

SPIN номер AuthorID: 56152412400

Scopus Author ID 56152412400

Web of Science Researcher IDGXU-0964-2022

Статья поступила в редакцию 10.04.2025;
одобрена после рецензирования 29.06.2025; принята к публикации 07.07.2025

The article was submitted 10.04.2025;
approved after reviewing 29.06.2025; accepted for publication 07.07.2025